

MODELADO ANALÍTICO MULTIDIMENSIONAL DEL COMPORTAMIENTO ACÚSTICO DE SILENCIADORES DE ESCAPE DE CÁMARA REVERSA CON MATERIAL ABSORBENTE Y PLACA PERFORADA

A. G. Antebas, F. D. Denia, A. M. Pedrosa, F. J. Fuenmayor

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera
s/n, 46022 Valencia, España

{ananl@doctor.upv.es; fradegul@mcm.upv.es; anpedsan@dimmm.upv.es; ffuenmay@mcm.upv.es}

Resumen

En el presente trabajo se ha llevado a cabo el desarrollo e implementación de un modelo analítico tridimensional para la simulación del comportamiento acústico de silenciadores reversos disipativos, con material absorbente y una placa perforada en su interior. Se ha recurrido a una descripción modal del campo acústico en los diferentes conductos en base a las funciones de Bessel. El acoplamiento de los campos de presión y velocidad acústica en las discontinuidades geométricas se ha realizado mediante las condiciones de interfase oportunas de continuidad (ajuste modal). Se ha incluido la propagación acústica en el interior del material absorbente, en base a su impedancia y número de onda complejo. Tras la aplicación de la técnica de ajuste modal, se ha obtenido la solución de la ecuación de ondas en el silenciador completo y el índice de pérdidas de transmisión de éste. Los resultados se han comparado posteriormente con cálculos de elementos finitos, mostrando una concordancia excelente, lo cual ha permitido validar el modelo analítico. Finalmente se ha estudiado en detalle la influencia en la atenuación acústica de la posición relativa de los conductos de entrada y salida y de la resistividad del material absorbente.

Palabras-clave: cámara reversa, silenciador disipativo, placa perforada frontal, absorbente, ajuste modal.

Abstract

In this work, a three-dimensional analytical model is developed to determine the acoustic performance of dissipative flow-reversing chamber with frontal perforated plate. The procedure is based on the mode matching method. To account for the wave propagation through absorbing fiber and perforations, wave number, complex characteristic impedance of absorbing material and perforation are employed. The study couples the continuity conditions of the acoustic pressure and particle velocity across each geometrical discontinuity. The analytical results are compared with numerical predictions based on finite element method, showing an excellent agreement which allows to validate the procedure. The effect of resistivity of absorbing material and the effect of relative location of the inlet/outlet on the acoustic attenuation performance are discussed in detail.

Keywords: flow-reversing chamber, dissipative expansion chamber, frontal perforated plate, absorbing material, mode matching method.

1 Introducción

La atenuación acústica obtenida mediante silenciadores de escape, puede conseguirse, entre otros, mediante dos fenómenos distintos, de tipo reactivo o disipativo, en función del principio al que responde la atenuación [1].

En el primer caso parte de la energía incidente retorna a la fuente debido a los fenómenos de reflexión que se producen como consecuencia de los cambios de sección y las particularidades geométricas, por esta razón la respuesta acústica de los silenciadores de este tipo depende en gran medida de parámetros geométricos tales como la relación de áreas entre conductos, su posición relativa o la longitud [2]-[8].

En el segundo caso, la pérdida de potencia acústica está asociada a la presencia de material absorbente o de elementos perforados que favorecen la disipación de energía durante la propagación de la onda acústica [9]-[11]. Existe una gran cantidad de literatura que responde al estudio del fenómeno acústico y a la caracterización de este tipo de componentes [12]-[20]. En base a la búsqueda de una mayor eficacia de la atenuación acústica, se combinan elementos que proporcionan atenuación acústica por medio de ambos fenómenos [21]-[22]. Con respecto a la caracterización del fenómeno acústico, aunque existen modelos de onda plana adecuados para la caracterización acústica para frecuencias bajas [1], se hace necesario el uso de técnicas analíticas multidimensionales [2], [3], [5], [7]-[9], [11], [12] y métodos numéricos [4], [6], [10], [13]-[16] para altas frecuencias, que permitan tener en cuenta la propagación de modos de alto orden, con un esfuerzo computacional razonable.

En este trabajo se ha desarrollado e implementado un modelo analítico tridimensional para la simulación del comportamiento acústico de silenciadores reversos disipativos, con material absorbente y placa perforada en su interior, el modelo se valida comparando con los resultados obtenidos mediante elementos finitos. Además se estudia la influencia de la resistividad del material absorbente y de la posición relativa de los conductos de entrada y salida en la atenuación acústica.

2 Modelo matemático

La Figura 1 muestra la geometría de un silenciador de escape de cámara reversa disipativa con una placa perforada frontal.

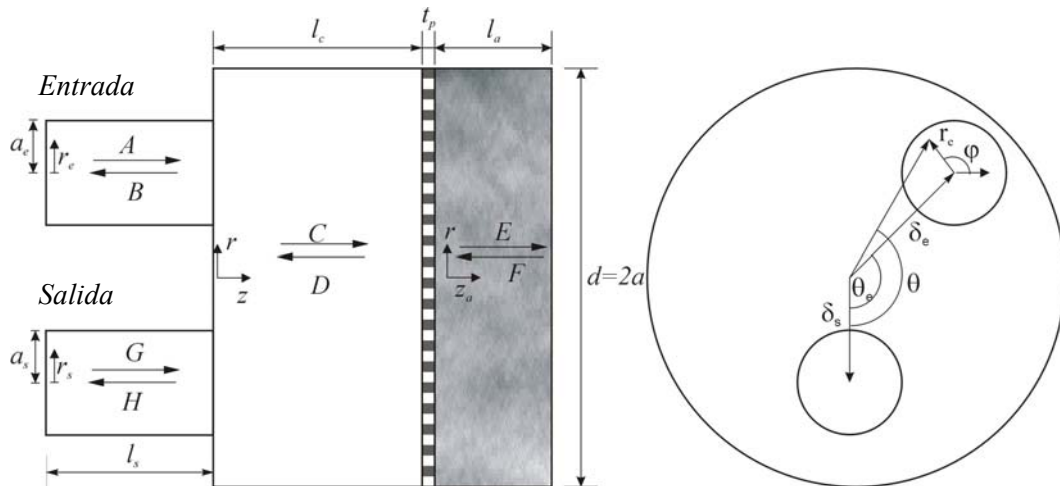


Figura 1 – Cámara reversa disipativa con una placa perforada frontal

La ecuación de Helmholtz, gobierna la propagación de ondas en el interior del silenciador [1],

$$\nabla^2 P + \kappa^2 P = 0 \quad (1)$$

donde P es la amplitud (compleja) de la presión acústica, $\kappa = \omega/c$ es el número de onda, ω es la frecuencia angular y c la velocidad del sonido. Empleando el método de separación de variables, la solución para la presión acústica en un conducto circular, por ejemplo, en el conducto de entrada, de radio a_e puede escribirse como la suma de una onda progresiva A viajando en la dirección positiva de z :

$$P_A = A_{00} e^{-j\kappa z} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} J_0(\alpha_{0n} r/a_e) e^{j\kappa_{0n} z} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn}^+ e^{-jm\theta} + A_{mn}^- e^{jm\theta}) J_m(\alpha_{mn} r/a_e) e^{j\kappa_{mn} z} \quad (2)$$

Y una onda B , viajando en la dirección negativa de z :

$$P_B = B_{00} e^{j\kappa z} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0n} J_0(\alpha_{0n} r/a_e) e^{-j\kappa_{0n} z} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (B_{mn}^+ e^{-jm\theta} + B_{mn}^- e^{jm\theta}) J_m(\alpha_{mn} r/a_e) e^{-j\kappa_{mn} z} \quad (3)$$

Siendo j la unidad imaginaria y A y B la amplitud de la presión compleja viajando en la dirección positiva y negativa de z respectivamente. En el resto de dominios de la cámara, la denominación utilizada para referirse a cada una de las componentes de la onda de presión es la representada en la Figura 1. Los superíndices $+$ y $-$ designan la dirección positiva y negativa de la coordenada θ , $J_m(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden m y α_{mn} es el valor propio que satisface la condición de contorno de pared rígida en la superficie del conducto, dada por $J'_m(\alpha_{mn}) = 0$, m y n denotan los modos asimétrico y radial. κ_{mn} representa el número de onda axial para el modo (m,n) , y viene dado por la expresión (4):

$$\kappa_{mn} = \sqrt{\kappa^2 - (\alpha_{mn}/a)^2} \quad (4)$$

donde a corresponde al radio del conducto en el que se propaga la onda caracterizada. El número de onda depende del medio a través del que se propaga la onda acústica, queda:

$$\kappa = \begin{cases} k = 2\pi f/c & ; 0 \leq z \leq l_c \\ \tilde{k} = 2\pi f/\tilde{c} & ; 0 \leq z_a \leq l_a \end{cases} \quad (5)$$

siendo k el número de onda correspondiente a la propagación de la onda en aire, f la frecuencia y c la velocidad del sonido en el aire. Análogamente, \tilde{k} corresponde al número de onda del material absorbente y \tilde{c} la velocidad del sonido en el mismo (Apéndice A).

A partir de la ecuación de Euler [1], se deduce la expresión de la componente axial de la velocidad acústica:

$$j\rho\omega U = -\nabla P \quad (6)$$

donde ρ es la densidad del medio en que se propaga la onda. De forma general la velocidad axial puede expresarse, como la suma de la velocidad de la onda incidente A y una onda B reflejada:

$$U_A = \frac{1}{\rho\omega} \left[\kappa A_{00} e^{-j\kappa z} - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{0n} A_{0n} J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a_e} r\right) e^{j\kappa_{0n} z} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{mn} (A_{mn}^+ e^{-jm\theta} + A_{mn}^- e^{jm\theta}) J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a_e} r\right) e^{j\kappa_{mn} z} \right] \quad (7)$$

$$U_B = \frac{-1}{\rho\omega} \left[\kappa B_{00} e^{j\kappa z} - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{0n} B_{0n} J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a_e} r\right) e^{-j\kappa_{0n} z} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{mn} (B_{mn}^+ e^{-jm\theta} + B_{mn}^- e^{jm\theta}) J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a_e} r\right) e^{-j\kappa_{mn} z} \right] \quad (8)$$

De esta forma, la presión y la velocidad acústica dentro de cada uno de los dominios de estudio, queda expresada como suma de infinitos términos de funciones de Bessel.

2.1 Condiciones de contorno

Aplicando las condiciones de contorno y operando sobre ellas, se construye un sistema de ecuaciones lineal algebraico donde las incógnitas son la amplitud de la presión acústica en cada uno de los conductos: conducto de entrada $A-B$, salida $G-H$, cámara $C-D$ y cámara con material absorbente $E-F$.

En la parte derecha de la cámara, la condición de contorno de pared rígida impone,

$$U_E + U_F \Big|_{z_a=l_a} = 0 \quad (9)$$

En la parte izquierda de la cámara, la condición de continuidad en presión proporciona,

$$P_A + P_B \Big|_{z=0} = P_C + P_D \Big|_{z=0} \quad \text{en } S_e \quad (10)$$

$$P_C + P_D \Big|_{z=0} = P_G + P_H \Big|_{z=0} \quad \text{en } S_s \quad (11)$$

Y la continuidad en velocidad supone

$$U_A + U_B \Big|_{z=0} = U_C + U_D \Big|_{z=0} \quad \text{en } S_e \quad (12)$$

$$U_C + U_D \Big|_{z=0} = U_G + U_H \Big|_{z=0} \quad \text{en } S_s \quad (13)$$

$$U_C + U_D \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{en } S-S_e-S_s \quad (14)$$

$$U_C + U_D \Big|_{z=l_c} = U_E + U_F \Big|_{z_a=0} \quad \text{en la sección del perforado} \quad (15)$$

Por último la expresión que tiene en cuenta la impedancia del perforado, es

$$U_C + U_D \Big|_{z=l_c} = (P_C + P_D \Big|_{z=l_c} - P_E + P_F \Big|_{z_a=0}) / Z_p \quad (16)$$

donde Z_p es la impedancia del perforado afectada por la presencia del material absorbente (Apéndice B).

2.2 Evaluación de los coeficientes

La ecuación (9) proporciona directamente,

$$F_{00} = E_{00} e^{-j2\tilde{k}l_a} ; \quad F_{0s} = E_{0s} e^{j2\tilde{k}_0s l_a} ; \quad F_{1s}^- = E_{1s}^- e^{j2\tilde{k}_{1s} l_a} ; \quad F_{1s}^+ = E_{1s}^+ e^{j2\tilde{k}_{1s} l_a} \quad (17)$$

Si se multiplica por ambos lados la ecuación (10) por $J_t(\alpha_{1s} r_e/a_e) e^{jt\theta}$ y se integra en la sección de entrada, y se utiliza las relaciones integrales de las funciones de Bessel y el teorema de adición de Graf [23][24], para $t=0$ y $s=0$ queda:

$$\begin{aligned} (A_{00} + B_{00}) \frac{a_e^2}{2} &= (C_{00} + D_{00}) \frac{a_e^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0n} + D_{0n}) \frac{a a_e}{\alpha_{0n}} J_0(\alpha_{0n} \delta_e/a) J_1(\alpha_{0n} a_e/a) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(C_{mn}^+ + D_{mn}^+) e^{-jm\theta_e} + (C_{mn}^- + D_{mn}^-) e^{jm\theta_e} \right] \frac{a a_e}{\alpha_{mn}} J_m(\alpha_{mn} \delta_e/a) J_1(\alpha_{mn} a_e/a) \end{aligned} \quad (18)$$

Para $t=0$ y $s=1,2,\dots,\infty$

$$\begin{aligned} (A_{0s} + B_{0s}) \frac{a_e^2}{2} J_0(\alpha_{0s}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0n} + D_{0n}) J_0(\alpha_{0n} \delta_e/a) \frac{\alpha_{0n} a_e/a J_0'(\alpha_{0n} a_e/a)}{(\alpha_{0s}/a_e)^2 - (\alpha_{0n}/a)^2} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(C_{mn}^+ + D_{mn}^+) e^{-jm\theta_e} + (C_{mn}^- + D_{mn}^-) e^{jm\theta_e} \right] J_m(\alpha_{mn} \delta_e/a) \frac{\alpha_{mn} a_e/a J_0'(\alpha_{mn} a_e/a)}{(\alpha_{0s}/a_e)^2 - (\alpha_{mn}/a)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

Para $t=1,2, \dots, \infty$, y $s=0,1,2, \dots$,

$$\begin{aligned} (A_{ts}^+ + B_{ts}^+) \frac{a_e^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{ts}^2}\right) J_t(\alpha_{ts}) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0n} + D_{0n}) J_t(\alpha_{0n} \delta_e / a) \frac{\alpha_{0n} a_e / a J_t'(\alpha_{0n} a_e / a)}{(\alpha_{ts} / a_e)^2 - (\alpha_{0n} / a)^2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(C_{mn}^+ + D_{mn}^+) J_{m+t}(\alpha_{mn} \delta_e / a) e^{-jm\theta_e} + (C_{mn}^- + D_{mn}^-) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{mn} \delta_e / a) e^{jm\theta_e} \right] \frac{\alpha_{mn} a_e / a J_t'(\alpha_{mn} a_e / a)}{(\alpha_{ts} / a_e)^2 - (\alpha_{mn} / a)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Para la misma condición si se multiplica ambos lados de la ecuación (10) por $J_t(\alpha_{ts} r_e / a_e) e^{-jt\phi} dS$, y se integra en la sección de entrada, para $t=1,2, \dots, \infty$, y $s=0,1,2, \dots, \infty$ resulta:

$$\begin{aligned} (A_{ts}^- + B_{ts}^-) \frac{a_e^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{ts}^2}\right) J_t(\alpha_{ts}) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0n} + D_{0n}) J_t(\alpha_{0n} \delta_e / a) \frac{\alpha_{0n} a_e / a J_t'(\alpha_{0n} a_e / a)}{(\alpha_{ts} / a_e)^2 - (\alpha_{0n} / a)^2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(C_{mn}^+ + D_{mn}^+) (-1)^t J_{m-t}(\alpha_{mn} \delta_e / a) e^{-jm\theta_e} + (C_{mn}^- + D_{mn}^-) J_{m+t}(\alpha_{mn} \delta_e / a) e^{jm\theta_e} \right] \frac{\alpha_{mn} a_e / a J_t'(\alpha_{mn} a_e / a)}{(\alpha_{ts} / a_e)^2 - (\alpha_{mn} / a)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Utilizando las mismas operaciones sobre las condiciones de continuidad en presión en el conducto de salida, ecuación (11), se obtienen expresiones similares. Las diferencias existentes se pueden tener en cuenta realizando las sustituciones detalladas en la tabla 1:

Tabla 1 – Cambios a realizar en las ecuaciones de la expansión para obtener las de la contracción

Expansión (10)	Contracción (11)
A, B	G, H
a_e	a_s
δ_e	δ_s
θ_e	$\theta_s=0$

A continuación se opera con las condiciones de continuidad de velocidad dadas por las ecuaciones (12)-(14), multiplicando por $J_t(\alpha_{ts} r/a) e^{jt\theta} dS$, integrándolas sobre S_e , S_s y $S-S_e-S_s$ respectivamente y sumándolas después. La ecuación para $t=0$ y $s=0$ queda:

$$(A_{00} - B_{00}) a_e^2 + (G_{00} - H_{00}) a_s^2 = (C_{00} - D_{00}) a^2 \quad (22)$$

Para $t=0$ y $s=1,2, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} k(A_{00} - B_{00}) \frac{a a_e}{\alpha_{0s}} J_0(\alpha_{0s} \delta_e / a) J_1(\alpha_{0s} a_e / a) - \sum_{n=1}^{\infty} k_{e,0n} (A_{0n} - B_{0n}) J_0(\alpha_{0s} \delta_e / a) \frac{\alpha_{0s} a_e / a J_0(\alpha_{0n}) J_0'(\alpha_{0s} a_e / a)}{(\alpha_{0n} / a_e)^2 - (\alpha_{0s} / a)^2} - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{e,mn} \left[(A_{mn}^+ - B_{mn}^+) + (A_{mn}^- - B_{mn}^-) \right] J_m(\alpha_{0s} \delta_e / a) \frac{\alpha_{0s} a_e / a J_m(\alpha_{mn}) J_m'(\alpha_{0s} a_e / a)}{(\alpha_{mn} / a_e)^2 - (\alpha_{0s} / a)^2} + \\ k(G_{00} - H_{00}) \frac{a a_s}{\alpha_{0s}} J_0(\alpha_{0s} \delta_s / a) J_1(\alpha_{0s} a_s / a) - \sum_{n=1}^{\infty} k_{s,0n} (G_{0n} - H_{0n}) J_0(\alpha_{0s} \delta_s / a) \frac{\alpha_{0s} a_s / a J_0(\alpha_{0n}) J_0'(\alpha_{0s} a_s / a)}{(\alpha_{0n} / a_s)^2 - (\alpha_{0s} / a)^2} - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{s,mn} \left[(G_{mn}^+ - H_{mn}^+) + (G_{mn}^- - H_{mn}^-) \right] J_m(\alpha_{0s} \delta_s / a) \frac{\alpha_{0s} a_s / a J_m(\alpha_{mn}) J_m'(\alpha_{0s} a_s / a)}{(\alpha_{mn} / a_s)^2 - (\alpha_{0s} / a)^2} = \\ = -k_{0s} (C_{0s} - D_{0s}) \frac{a^2}{2} J_0^2(\alpha_{0s}) \end{aligned} \quad (23)$$

Y para $t=1,2, \dots, \infty$ y $s=0,1,2, \dots, \infty$

$$\begin{aligned}
& \left\{ k(A_{00} - B_{00}) \frac{a a_e}{\alpha_{ts}} J_t(\alpha_{ts} \delta_e/a) J_1(\alpha_{ts} a_e/a) - \sum_{n=1}^{\infty} k_{e,0n} (A_{0n} - B_{0n}) J_t(\alpha_{ts} \delta_e/a) \frac{\alpha_{ts} a_e/a J_0(\alpha_{0n}) J'_0(\alpha_{ts} a_e/a)}{(\alpha_{0n}/a_e)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} - \right. \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{e,mn} \left[(A_{mn}^+ - B_{mn}^+) J_{t+m}(\alpha_{ts} \delta_e/a) + (A_{mn}^- - B_{mn}^-) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{ts} \delta_e/a) \right] \frac{\alpha_{ts} a_e/a J_m(\alpha_{mn}) J'_m(\alpha_{ts} a_e/a)}{(\alpha_{mn}/a_e)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} \right\} e^{jt\theta_e} + \\
& + k(G_{00} - H_{00}) \frac{a a_s}{\alpha_{ts}} J_t(\alpha_{ts} \delta_s/a) J_1(\alpha_{ts} a_s/a) - \sum_{n=1}^{\infty} k_{s,0n} (G_{0n} - H_{0n}) J_t(\alpha_{ts} \delta_s/a) \frac{\alpha_{ts} a_s/a J_0(\alpha_{0n}) J'_0(\alpha_{ts} a_s/a)}{(\alpha_{0n}/a_s)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} \quad (24) \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{s,mn} \left[(G_{mn}^+ - H_{mn}^+) J_{t+m}(\alpha_{ts} \delta_s/a) + (G_{mn}^- - H_{mn}^-) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{ts} \delta_s/a) \right] \frac{\alpha_{ts} a_s/a J_m(\alpha_{mn}) J'_m(\alpha_{ts} a_s/a)}{(\alpha_{mn}/a_s)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} = \\
& = -k_{ts} (C_{ts}^+ - D_{ts}^+) \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{ts}^2} \right) J_t^2(\alpha_{ts})
\end{aligned}$$

donde los número de onda axial para los conductos de entrada y salida se definen como $k_{e,mn} = \sqrt{k^2 - (\alpha_{mn}/a_e)^2}$, $k_{s,mn} = \sqrt{k^2 - (\alpha_{mn}/a_s)^2}$. Repitiendo la misma secuencia de operaciones sobre las ecuaciones de continuidad de velocidad en la sección de entrada (12)-(14), pero multiplicando en esta ocasión todas ellas por $J_t(\alpha_{ts} r/a) e^{-jt\theta}$, las ecuaciones para $t=1,2, \dots, \infty$ y $s=0,1,2, \dots, \infty$ queda:

$$\begin{aligned}
& \left\{ k(A_{00} - B_{00}) \frac{a a_e}{\alpha_{ts}} J_t(\alpha_{ts} \delta_e/a) J_1(\alpha_{ts} a_e/a) - \sum_{n=1}^{\infty} k_{e,0n} (A_{0n} - B_{0n}) J_t(\alpha_{ts} \delta_e/a) \frac{\alpha_{ts} a_e/a J_0(\alpha_{0n}) J'_0(\alpha_{ts} a_e/a)}{(\alpha_{0n}/a_e)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} - \right. \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{e,mn} \left[(A_{mn}^+ - B_{mn}^+) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{ts} \delta_e/a) + (A_{mn}^- - B_{mn}^-) J_{t+m}(\alpha_{ts} \delta_e/a) \right] \frac{\alpha_{ts} a_e/a J_m(\alpha_{mn}) J'_m(\alpha_{ts} a_e/a)}{(\alpha_{mn}/a_e)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} \right\} e^{-jt\theta_e} + \\
& + k(G_{00} - H_{00}) \frac{a a_s}{\alpha_{ts}} J_t(\alpha_{ts} \delta_s/a) J_1(\alpha_{ts} a_s/a) - \sum_{n=1}^{\infty} k_{s,0n} (G_{0n} - H_{0n}) J_t(\alpha_{ts} \delta_s/a) \frac{\alpha_{ts} a_s/a J_0(\alpha_{0n}) J'_0(\alpha_{ts} a_s/a)}{(\alpha_{0n}/a_s)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} \quad (25) \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{s,mn} \left[(G_{mn}^+ - H_{mn}^+) (-1)^m J_{t-m}(\alpha_{ts} \delta_s/a) + (G_{mn}^- - H_{mn}^-) J_{t+m}(\alpha_{ts} \delta_s/a) \right] \frac{\alpha_{ts} a_s/a J_m(\alpha_{mn}) J'_m(\alpha_{ts} a_s/a)}{(\alpha_{mn}/a_s)^2 - (\alpha_{ts}/a)^2} = \\
& = -k_{ts} (C_{ts}^- - D_{ts}^-) \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_{ts}^2} \right) J_t^2(\alpha_{ts})
\end{aligned}$$

Para la condición de velocidad en la placa perforada (15), las propiedades de ortogonalidad de los modos de presión en la cámara, permiten escribir, para $t=0$ y $s=0$

$$(k/\rho_0) (C_{00} e^{-jkl_c} - D_{00} e^{jkl_c}) = (\tilde{k}/\tilde{\rho}) (E_{00} - F_{00}) \quad (26)$$

Para $t=0$ y $s=1,2, \dots, \infty$

$$(k_{0s}/\rho_0) (C_{0s} e^{jk_{0s}l_c} - D_{0s} e^{-jk_{0s}l_c}) = (\tilde{k}_{0s}/\tilde{\rho}) (E_{0s} - F_{0s}) \quad (27)$$

Y Para $t=1,2, \dots, \infty$ y $s=0,1,2, \dots, \infty$

$$(k_{ts}/\rho_0) (C_{ts}^{\pm} e^{jk_{ts}l_c} - D_{ts}^{\pm} e^{-jk_{ts}l_c}) = (\tilde{k}_{ts}/\tilde{\rho}) (E_{ts}^{\pm} - F_{ts}^{\pm}) \quad (28)$$

Para la relación presión-velocidad que impone la presencia de la placa perforada, dada por (16), queda para $t=0$, $s=0$

$$C_{00} e^{-jkl_c} (Z_p k / (\rho_0 \omega) - 1) - D_{00} e^{jkl_c} (Z_p k / (\rho_0 \omega) k + 1) = -(E_{00} + F_{00}) \quad (29)$$

Para $t=0$ y $s=1,2, \dots, \infty$

$$C_{0s} e^{jk_{0s}l_c} (Z_p k_{0s} / (\rho_0 \omega) + 1) - D_{0s} e^{-jk_{0s}l_c} (Z_p k_{0s} / (\rho_0 \omega) - 1) = E_{0s} + F_{0s} \quad (30)$$

Y para $t=1,2, \dots, \infty$ y $s=0,1,2, \dots, \infty$

$$C_{ts}^{\pm} e^{jk_{ts}l_c} (Z_p k_{ts} / (\rho_0 \omega) + 1) - D_{ts}^{\pm} e^{-jk_{ts}l_c} (Z_p k_{ts} / (\rho_0 \omega) - 1) = E_{ts}^{\pm} + F_{ts}^{\pm} \quad (31)$$

3 Caracterización acústica del silenciador

La cuantificación de la atenuación de ruido se hace mediante el índice de pérdidas por transmisión (TL). Para determinar el TL de la cámara de estudio se asume que la dimensión del conducto de entrada es tal que la onda incidente A es plana y su magnitud es elegida la unidad por conveniencia, de modo que $A_{00}=1$ y el resto de coeficientes asociados a ésta se anulan. Se impone también la condición de terminación anecoica en el conducto de salida, de modo que la onda reflejada (G) es nula.

Las ecuaciones (17)-(31) proporcionan, un sistema de infinitas ecuaciones, donde las incógnitas son la magnitud de los infinitos modos de las ondas incidentes y reflejadas en cada dominio. Como el efecto de los modos de mayor orden es cada vez de menor importancia en la solución, se trunca la serie haciendo $t=m=p$ y $s=n=q$ de modo que resulta un sistema con $6(2p+1)(q+1)$ ecuaciones y el mismo número de incógnitas. La selección del número de modos (p y q) depende del área transversal, de la longitud de cada uno de los conductos y de la impedancia del conjunto perforado-absorbente.

La expresión empleada para el cálculo del TL , de forma general viene dada por la siguiente expresión:

$$TL = -20 \log \left(\left| \frac{a_s}{a_e} \right| \left| H_{00} e^{-jkl_s} + \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} e^{jk_{0n}l_s} \right| \right) \quad (32)$$

4 Resultados y conclusiones

4.1 Validación mediante elementos finitos

La Figura 2 muestra la comparación de los resultados del modelo analítico y el cálculo con elementos finitos para una geometría de silenciador caracterizada por $a_e=a_s=0.02$ m; $a=0.091875$ m; $l_e=l_s=0.1$ m; $l_c=0.2$ m; $l_a=0.1$ m; $\delta_e=\delta_s=0.045$ m; $\theta_e=180^\circ$; $t_p=0.0009$ m. La porosidad de la superficie perforada σ es de 8%, el diámetro de orificio, d_h es 0.00249 m, y la resistividad del material absorbente R es 1000 rayl/m. Se comprueba que existe una concordancia excelente entre ambos modelos en todo el rango de frecuencias de interés.

El modelo analítico predice de forma correcta todas las particularidades del TL , incluyendo de forma precisa los efectos de la tridimensionalidad del campo acústico.

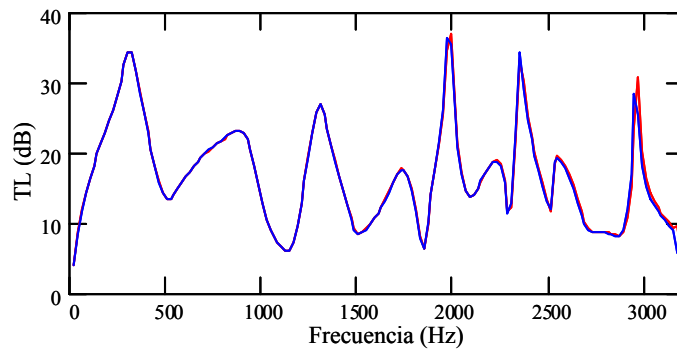


Figura 2 – TL de cámara reversa con material absorbente y una placa perforada frontal: —, Ajuste modal; —, MEF.

4.2 Efecto de la posición de los conductos

Con el fin de estudiar el efecto de la posición de los conductos en el comportamiento acústico del silenciador de estudio, se cambia la posición de los conductos como se muestra en la Tabla 2, para una geometría caracterizada por $a_e=a_s=0.02$ m; $a=0.091875$ m; $l_e=l_s=0.1$ m; $l_c=0.2$ m; $l_a=0.1$ m.

Tabla 2 – Geometrías consideradas para analizar el efecto de la posición de los conductos.

Geometría	σ (%)	d_h (m)	t_p (m)	R (rayl/m)	δ_e (m)	δ_s (m)	θ_e
1	8	0.00249	0.0009	Sin material absorbente	0.045	0.045	180°
2	8	0.00249	0.0009	Sin material absorbente	0.045	0.045	90°
3	8	0.00249	0.0009	Sin material absorbente	0.0	0.045	--
4	8	0.00249	0.0009	Sin material absorbente	0.0	0.057661	--
5	100	--	--	1000	0.045	0.045	180°
6	100	--	--	1000	0.045	0.045	90°
7	100	--	--	1000	0.0	0.045	--
8	100	--	--	1000	0.0	0.057661	--

La Figura 3 presenta una comparación de las geometrías 1, 2, 3, y 4. Se trata de una cámara reversa con placa perforada y sin material absorbente. Puede comprobarse que la peor configuración corresponde al caso de ambos conductos descentrados 180°, como consecuencia de la propagación del modo (1,0). Esta situación se resuelve parcialmente modificando el descentrado a 90°, con lo cual se retrasa la aparición de modos de alto orden hasta el (2,0).

Para obtener una atenuación más favorable puede optarse por centrar el tubo de entrada, con lo cual dicho conducto cae sobre la línea nodal de los modos previos y se restringe su propagación. Así, el primer modo de alto orden que se propaga es el modo axisimétrico (0,1), cuya frecuencia de corte es mayor. Manteniendo el conducto de entrada centrado y el de salida descentrado con la distancia óptima (línea nodal del modo (0,1), a una distancia del centro dada por $0.6276 a$), se puede observar una mejora del TL .

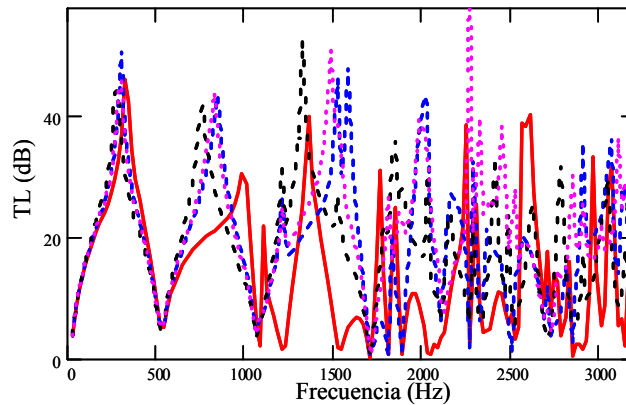


Figura 3 – TL de cámara reversa con placa perforada y sin material absorbente: —, 1, conductos descentrados a 180 grados; - - - -, 2, conductos descentrados a 90 grados; - - - -, 3, entrada centrada y salida descentrada; - - - -, 4, entrada centrada y salida descentrada con distancia óptima.

La Figura 4 presenta una comparación de las geometrías 5, 6, 7, y 8. Se trata de una cámara reversa con material absorbente y sin placa perforada. De nuevo los comentarios anteriores son aplicables en el sentido de que la configuración con entrada centrada limita la propagación de modos de alto orden, sobretodo con el descentrado óptimo. Ahora, la presencia de material absorbente aumenta el nivel medio de atenuación, y desaparecen las bandas de paso así como los picos puntuales de atenuación. La respuesta del silenciador es menos sensible a la posición de los tubos de entrada y salida, sobre todo a medida que aumenta la resistividad.

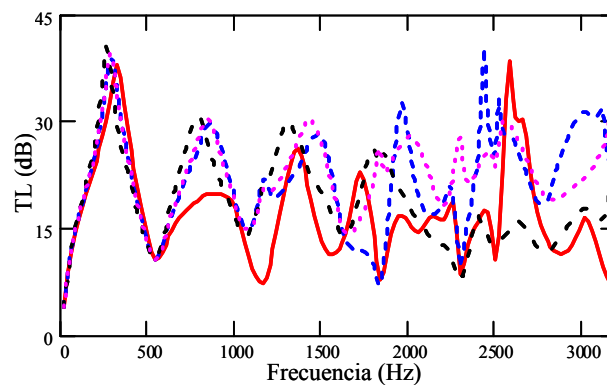


Figura 4 – TL de cámara reversa con material absorbente y sin placa perforada: —, 5, conductos descentrados a 180 grados; - - - -, 6, conductos descentrados a 90 grados; - - - -, 7, entrada centrada y salida descentrada; - - - -, 8, entrada centrada y salida descentrada con distancia óptima.

4.3 Efecto de la resistividad

La Figura 5 muestra el efecto de la resistividad del material absorbente en el comportamiento acústico del silenciador. Para el análisis se ha elegido la geometría 1 (Tabla 2) y los siguientes valores de resistividad: $R=1000$ rayl/m, $R=4896$ rayl/m y $R=17378$ rayl/m. Se comprueba el efecto favorable de la introducción de fibra en el interior del silenciador. Por un lado, se eliminan las bandas de paso, es decir, zonas con atenuación nula, tal como se ha visto anteriormente. Por otro, se reduce el efecto

negativo de la propagación de modos de alto orden. Cabe indicar que la atenuación se hace más uniforme en el rango de frecuencias estudiado, al no estar tan marcados los picos de resonancia.

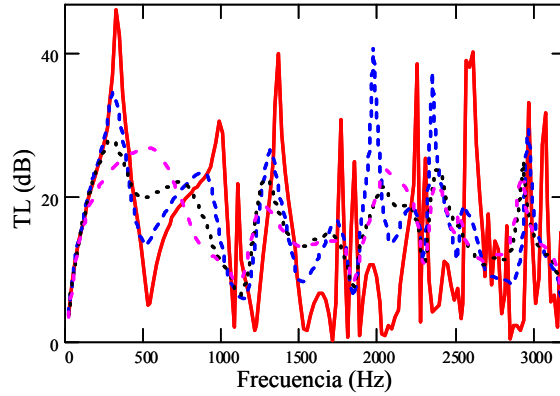


Figura 5 – TL de la geometría 1: —, sin material absorbente; - - - -, $R = 1000$ rayl/m; - . - . -, $R = 4896$ rayl/m; - - - -, $R = 17378$ rayl/m.

4.4 Conclusiones

Se ha llevado a cabo el desarrollo e implementación de una herramienta para el modelado y cálculo analítico tridimensional del comportamiento acústico de silenciadores reversos disipativos, con material absorbente y una placa perforada en su interior. Los resultados alcanzados muestran una excelente concordancia con los obtenidos mediante el cálculo de elementos finitos. En el estudio del comportamiento del silenciador, se ha analizado el efecto de la posición de los conductos y el de la resistividad del material absorbente. Se ha comprobado que la peor configuración corresponde al caso de ambos conductos descentrados a 180 grados, debido a la propagación del primer modo asimétrico (1,0). Esta situación se resuelve parcialmente modificando el descentrado a 90 grados, con lo cual se retarda la aparición de modos de alto orden hasta el siguiente modo asimétrico (2,0). Para obtener una atenuación más favorable, puede optarse por centrar el tubo de entrada, con lo cual dicho conducto cae sobre la línea nodal de los modos previos y se restringe su propagación. Manteniendo el conducto de entrada centrado y el de salida descentrado con la distancia óptima correspondiente a la línea nodal del modo (0,1), se puede observar como mejora la atenuación. Se ha comprobado el efecto favorable de la introducción de fibra en el interior del silenciador, ya que elimina las bandas de paso, y reduce el efecto negativo de la propagación de modos de alto orden.

Apéndice A

En el presente trabajo se ha empleado la caracterización del material absorbente (fibra de vidrio texturizada de Owens Corning) derivada del estudio de Delany [17], depurada y utilizada posteriormente por diversos investigadores [21], [25]-[28].

$$\tilde{Z} = Z \left[\left(1 + 0.09534(f \rho_0 / R)^{-0.754} \right) + j \left(-0.08504(f \rho_0 / R)^{-0.732} \right) \right] \quad (33)$$

$$\tilde{k} = k \left[\left(1 + 0.16(f \rho_0 / R)^{-0.577} \right) + j \left(-0.18897(f \rho_0 / R)^{-0.595} \right) \right] \quad (34)$$

donde $\tilde{Z}=\tilde{\rho}\tilde{c}$ es la impedancia compleja del material absorbente, $Z=\rho_0c$ la impedancia del aire, $\tilde{k}=2\pi f/\tilde{c}$ el número de onda, R la resistividad del material absorbente medida en *rayl/m* y ρ_0 es la densidad del aire.

Apéndice B

La expresión utilizada para la impedancia del perforado, depende del número de onda k , de la porosidad σ (relación entre el área de agujeros y el área total de la placa), el diámetro de los orificios d_h y el espesor t_p de la placa [26]-[27] y puede estimarse como:

$$Z_p = (0.006 + jk(t_p + 0.425 \cdot d_h(1 + \tilde{\rho}/\rho_0)F(\sigma))) / \sigma \quad (35)$$

donde $F(\sigma)$ tiene en cuenta la interacción de los orificios y se obtiene promediando las correcciones propuestas por Ingard $F_I(\sigma)$ y Fok $F_F(\sigma)$,

$$F_I(\sigma) = 1 - 0.7\sqrt{\sigma} \quad (36)$$

$$F_F(\sigma) = 1 - 1.41\sqrt{\sigma} + 0.34(\sqrt{\sigma})^3 + 0.07(\sqrt{\sigma})^5 \quad (37)$$

$$F(\sigma) = 0.5(F_I(\sigma) + F_F(\sigma)) \quad (38)$$

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación del Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto DPI 2007-62635 y de la Conselleria d'Empresa, Universitat i Ciència de la Generalitat Valenciana (GV/2007/133).

Referencias

- [1] Munjal, M. L. *Acoustics of Ducts and Mufflers*, Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [2] Eriksson, L. J. Effect of inlet/outlet locations on higher order modes in silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 72, 1982, pp. 1208-1211.
- [3] Selamet, A.; Ji, Z.L. A Acoustic attenuation performance of circular flow-reversing chambers. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 104 (5), 1998, pp. 2867-2877.
- [4] Selamet, A.; Radavich, P.M. The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational and experimental. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 201 (4), 1997, pp. 407-426.
- [5] Selamet, A.; Ji, Z.L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: I. Analytical approach. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 213 (4), 1998, pp. 601-617.
- [6] Selamet, A.; Ji, Z.L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with offset inlet/outlet: II. Comparison with experimental and computational studies. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 213 (4), 1998, pp. 619-641.
- [7] Selamet, A.; Ji, Z.L. Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with single-inlet and doubled-outlet. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229 (1), 2000, pp. 3-19.

- [8] Denia, F. D.; Albelda, J.; Fuenmayor, F. J. Acoustic behaviour of elliptical chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 241 (3), 2001, pp. 401-421.
- [9] Xu, M.B.; Selamet, A.; Lee, I.J.; Huff, N.T. Sound attenuation in dissipative expansion chambers. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272 (3-5), 2004, pp. 1125-1133.
- [10] Denia, F.D.; Ródenas, J.J.; Roda, A.; Broatch, A. Estudio numérico y experimental de la atenuación acústica en silenciadores elípticos con placa perforada. *Métodos numéricos en ingeniería V*, Madrid, 3 a 6 de Junio de 2002, pp. 1-19.
- [11] Selamet, A.; Xu, M.B.; Lee, I.J. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 115 (5), 2004, pp. 2091-2099.
- [12] Ih, J.-G.; Lee, B.-H. Theoretical prediction of the transmission loss of circular reversing chamber mufflers. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 112, 1987, pp. 261-272.
- [13] Young, C. J.; Crocker, M. J. Prediction of transmission loss in mufflers by the finite-element method. *Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 57, 1975, pp. 144-148.
- [14] Peat, K. S. Evaluation of four-pole parameters for ducts with flow by the finite element method. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 84, 1982, pp. 389-395.
- [15] Peat, K. S.; Rathi, K. L. A finite element analysis of the convected acoustic wave motion in dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 184, 1995, pp. 529-545.
- [16] Wu, T. W. *Boundary Element Acoustics. Fundamentals and Computer Codes*, WIT Press, Southampton, 2000.
- [17] Delany, M.E.; Bazley, E.N. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, Vol. 3 (2), 1970, pp. 105-116.
- [18] Sullivan, J.W. A method for modelling perforated tube muffler components. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 66 (3), 1979, pp. 772-778.
- [19] Sullivan, J.W. A method for modelling perforated tube muffler components. II. Applications. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 66 (3), 1979, pp. 779-788.
- [20] Kirby, R.; Cummings, A. Prediction of the bulk acoustic properties of fibrous materials at low frequencies. *Applied Acoustics*, Vol. 56 (2), 1999, pp. 101-125.
- [21] Selamet, A.; Lee, I.J.; Huff, N.T. Acoustic attenuation of hybrid silencers. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262 (3), 2003, pp. 509-527.
- [22] Denia, F. D.; Selamet, A.; Martínez, M. J.; Torregrosa, A. J. Hybrid mufflers with short lateral chambers: analytical, numerical and experimental studies. *13th International congress on sound and vibration*, Viena, 2 a 6 de Julio de 2006, pp. 1-8.
- [23] Abramowitz, M.; Stegun, I.A. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972.
- [24] Rey, J.; Castro, A. *Funciones de Bessel*, Dossal, Madrid, 1958
- [25] Selamet, A.; Xu, M. B.; Lee, I.-J.; Huff, N. T. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers with inlet/outlet extensions. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 117 (4), 2005, pp. 2078-2089.
- [26] Bento, J.L.; Acoustic characteristics of perforate liners in expansion chambers, Tesis doctoral, Universidad de Southampton, 1983.
- [27] Denia, F. D.; Selamet, A.; Fuenmayor, F.J.; Kirby, R. Acoustic attenuation performance of perforated dissipative mufflers with empty inlet/outlet extensions. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 302 (4-5), 2007, pp. 1000-1017.
- [28] Selamet, A.; Xu, M. B.; Lee, I.-J.; Huff, N. T. Helmholtz resonator lined with absorbing material. *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 117 (2), 2005, pp. 725-733.